1 Applicazioni Lineari tra Spazi Vettoriali

Definizione 1 (Applicazioni lineari). Si chiama *applicazione lineare*, una applicazione η tra uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ ed uno spazio vettoriale $\mathcal{W}$ sul campo $\mathbb{K}$

$$\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W},$$

tale che

$$\begin{array}{lll} (i) & \eta(v' + v'') = \eta(v') + \eta(v''), & \forall v',\, v'' \in \mathcal{V}, \\ (ii) & \eta(\alpha v) = \alpha\eta(v), & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{array}$$

Definizione 2 (Immagine). Data una applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, ed un sottospazio vettoriale $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, l'insieme

$$\eta(\mathcal{U}) = \Big\{ w \in \mathcal{W}, \text{tali che } \exists\, u \in \mathcal{U}, \eta(u) = w \Big\} \subseteq \mathcal{W},$$

si chiama *immagine di* $\mathcal{U}$ in $\mathcal{W}$.

Definizione 3 (Controimmagine). Data una applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, ed un elemento $w \in \mathcal{W}$, il sottoinsieme di $\mathcal{V}$

$$\eta^{-1}(w) = \Big\{ v \in \mathcal{V}, \text{tali che } w = \eta(v) \Big\} \subseteq \mathcal{V},$$

si chiama *controimmagine di* w in $\mathcal{V}$.

Definizione 4 (Nucleo di una applicazione lineare). Data una applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, la controimmagine dell'elemento nullo $0_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$

$$\eta^{-1}(0_{\mathcal{W}}) = \Big\{ v \in \mathcal{V}, \text{tali che } 0_{\mathcal{W}} = \eta(v) \Big\} \subseteq \mathcal{V},$$

si chiama *nucleo* di η.

Osservazione 1. Per indicare il nucleo di una applicazione lineare si usa spesso anche il termine *ker* di η, e si usa il simbolo $\textsc{Ker}(\eta)$. Talvolta, si usa anche il termine *spazio nullo* di η, mettendo in evidenza il fatto che il nucleo è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$, come mostreremo nel teorema 2.

Osservazione 2. Il nucleo di un applicazione lineare η non può mai essere vuoto. Infatti, esso contiene sempre almeno l'elemento nullo $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$. Dimostriamo infatti che per qualunque applicazione lineare η vale la proprietà $\eta(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$.

$$\begin{aligned} \eta(0_{\mathcal{V}}) &= \eta(0_{\mathcal{V}} + 0_{\mathcal{V}}), && \text{poiché } 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}} + 0_{\mathcal{V}}, \\ &= \eta(0_{\mathcal{V}}) + \eta(0_{\mathcal{V}}), && \text{per la linearità di } \eta, \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente

$$\eta(0_{\mathcal{V}}) = \eta(0_{\mathcal{V}}) - \eta(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}.$$

Teorema 1 (Immagine di un Sottospazio). *Sia data l'applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, ed un sottospazio vettoriale $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Allora, l'immagine $\eta(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{W}$.*

Dimostrazione: L'enunciato si dimostra verificando la C.N.E.S.

(i) Dati due vettori $w', w'' \in \eta(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$, siano $u', u'' \in \mathcal{V}$ due vettori, la cui esistenza segue dalla definizione di immagine di un sottospazio, tali che $w' = \eta(u')$ e $w'' = \eta(u'')$. Dalla linearità di η segue che

$$w' + w'' = \eta(u') + \eta(u'') = \eta(u' + u''),$$

e dato che $u' + u'' \in \mathcal{U}$, poiché $\mathcal{U}$ è un sottospazio vettoriale, allora risulta che $w' + w'' \in \eta(\mathcal{U})$.

(ii) Dato un vettore $w \in \eta(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}$, sia $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ un vettore la cui esistenza segue dalla definizione di immagine di un sottospazio, tale che $w = \eta(u)$. Si consideri, inoltre, lo scalare $\alpha \in \mathbb{K}$. Dalla linearità di η segue che

$$\alpha\, w = \alpha\, \eta(u) = \eta(\alpha\, u),$$

e dato che $\alpha u \in \mathcal{U}$, poiché $\mathcal{U}$ è un sottospazio vettoriale, allora risulta $\alpha\, w \in \eta(\mathcal{U})$. ■

Teorema 2 (Nucleo di una Applicazione). *Sia data l'applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Il nucleo dell'applicazione* $\mathrm{KER}(\eta) = \eta^{-1}(0_{\mathcal{W}}) \subseteq \mathcal{V}$ *è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$.*

Dimostrazione: Abbiamo già verificato che il nucleo di una applicazione lineare è un insieme non vuoto. L'enunciato del teorema di dimostra verificando la C.N.E.S.

(i) Si considerino due vettori $v', v'' \in \mathrm{KER}(\eta) \subseteq \mathcal{V}$, cioè tali che $\eta(v') = \eta(v'') = 0_{\mathcal{W}}$. Dalla linearità di η segue che

$$\eta(v' + v'') = \eta(v') + \eta(v'') = 0_{\mathcal{W}} + 0_{\mathcal{W}} = 0_{\mathcal{W}},$$

da cui segue immediatamente che $v' + v'' \in \mathrm{KER}(\eta)$.

(ii) Si consideri un vettore $v \in \mathrm{KER}(\eta) \subseteq \mathcal{V}$, cioè tale che $\eta(v) = 0_{\mathcal{W}}$, ed uno scalare $\alpha \in \mathbb{K}$. Dalla linearità di η segue che

$$\eta(\alpha\, v) = \alpha\, \eta(v) = \alpha\, 0_{\mathcal{W}} = 0_{\mathcal{W}},$$

da cui segue immediatamente che $\alpha\, v \in \mathrm{KER}(\eta)$. ■

Teorema 3 (Rappresentazione della Controimmagine). *Sia data l'applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, e siano $\bar{w} \in \eta(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$ un elemento dell'immagine di $\mathcal{V}$ attraverso η. Sia, inoltre, dato $\bar{v} \in \eta^{-1}(\bar{w})$, un* qualsiasi *elemento appartenente alla controimmagine di $\bar{w}$ in $\mathcal{V}$, per cui si abbia $\bar{w} = \eta(\bar{v})$.*

Allora la controimmagine di $\bar{w}$ in $\mathcal{V}$ ha la seguente rappresentazione:

$$\boxed{\eta^{-1}(\bar{w}) = \bar{v} + \text{KER}(\eta),}$$

cioè è l'insieme di tutti e soli *i vettori che si possono scrivere come somma del vettore $\bar{v}$ e di un (opportuno) vettore del nucleo di η.*

Dimostrazione: Per dimostrare la rappresentazione della controimmagine, dobbiamo verificare la doppia inclusione $\bar{v} + \text{KER}(\eta) \subseteq \eta^{-1}(\bar{w})$ e $\eta^{-1}(\bar{w}) \subseteq \bar{v} + \text{KER}(\eta)$.

(i) $\bar{v} + \text{KER}(\eta) \subseteq \eta^{-1}(\bar{w})$.
Sia $v \in \bar{v} + \text{KER}(\eta)$ un qualsiasi vettore della forma $v = \bar{v} + v_0$, con $v_0 = v - \bar{v} \in \text{KER}(\eta)$, cioè $\eta(v_0) = 0_{\mathcal{W}}$. Segue che

$$\begin{aligned} \eta(v) &= \eta(\bar{v} + v_0), && \text{perchè } v = \bar{v} + v_0, \\ &= \eta(\bar{v}) + \eta(v_0), && \text{per la linearità di } \eta, \\ &= \eta(\bar{v}) + 0_{\mathcal{W}}, && \text{perchè } v_0 \in \text{KER}(\eta), \\ &= \bar{w}, \end{aligned}$$

da cui segue $v \in \eta^{-1}(\bar{w})$, cioè ogni vettore della forma $v = \bar{v} + v_0$ con $v_0 \in \text{KER}(\eta)$ appartiene alla controimmagine di $\bar{w}$.

(ii) $\eta^{-1}(\bar{w}) \subseteq \bar{v} + \text{KER}(\eta)$.
Sia $v \in \eta^{-1}(\bar{w})$. Osserviamo che $v - \bar{v} \in \text{KER}(\eta)$, poichè

$$\begin{aligned} \eta(v - \bar{v}) &= \eta(v) - \eta(\bar{v}), && \text{per la linearità di } \eta, \\ &= \bar{w} - \bar{w}, && \text{perchè } \eta(v) = \eta(\bar{v}) = \bar{w}, \\ &= 0_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Quindi, introducendo il vettore $v_0 = v - \bar{v} \in \text{KER}(\eta)$, si può infine scrivere

$$v = \bar{v} + (v - \bar{v}) = \bar{v} + v_0 \in \bar{v} + \text{KER}(\eta).$$

Definizione 5 (Matrice associata). Sia data una applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, e siano $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ e $\{w_1, w_2, \dots w_m\}$ due basi rispettivamente di $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ (si suppone quindi $\text{DIM}(\mathcal{V}) = n$ e $\text{DIM}(\mathcal{W}) = m$). Introduciamo la matrice partizionata per colonne

$$\mathbf{A} = \Big\{ \eta(v_1), \eta(v_2) \dots \eta(v_n) \Big\},$$

dove le componenti dei vettori colonna $\eta(v_j) \in \mathcal{W}$ per ogni $j = 1, \dots, n$ sono determinate rispetto alla base fissata in $\mathcal{W}$, cioè

$$\Big(\mathbf{A}\Big)_{ij} = \eta(v_j)|_i, \qquad \text{con} \qquad \eta(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \eta(v_j)|_i \, w_i.$$

La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ si dice *matrice associata* alla applicazione lineare η rispetto alle basi di $\mathcal{V}$ e di $\mathcal{W}$, rispettivamente $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ e $\{w_1, w_2, \dots w_m\}$.

Definizione 6 (Rango). Sia data una applicazione lineare $\eta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Si chiama *rango* di η la dimensione dell'immagine $\eta(\mathcal{V})$, cioè

$$\text{RANGE}(\eta) = \text{RANGE}(\mathbf{A}).$$

Teorema 4. *Nelle ipotesi della definizione 5, l'immagine $\eta(\mathcal{V})$ è generata dai vettori colonna della matrice associata $\mathbf{A}$, $\eta(v_1)$, $\eta(v_2)$ $\dots$ $\eta(v_n)$.*

Dimostrazione: Consideriamo un qualunque vettore $v \in \mathcal{V}$, e la sua decomposizione sulla base fissata in $\mathcal{V}$, cioè

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Per la linearità di η l'immagine di v si ottiene come combinazione lineare dei vettori colonna di $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} \eta(v) &= \eta(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n), \\ &= \lambda_1 \eta(v_1) + \lambda_2 \eta(v_2) + \dots + \lambda_n \eta(v_n). \end{aligned}$$

Osservazione 3. Si noti che l'immagine è *generata* dalle immagini mediante η dei vettori della base scelta in $\mathcal{V}$, per cui questi vettori, che formano le colonne di $\mathbf{A}$ quando sono scritti rispetto alla base scelta in $\mathcal{W}$, sono sicuramente un sistema di generatori dell'immagine. Non è affatto detto, però, che siano anche una base, dato che potrebbero non essere linearmente indipendenti. Ciò succede sicuramente nel caso in cui $n > m$, per cui $\text{RANGE}(\eta) = \text{RANGE}(\mathbf{A}) \leq m$ ed almeno $n - m$ vettori immagine devono essere linearmente dipendenti dagli altri.

Definizione 7 (Sottospazio supplementare). Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e l'insieme non vuoto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ un suo sottospazio. Il sottospazio $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{V}$ tale che

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \tilde{\mathcal{U}}$$

si chiama *supplementare* di $\mathcal{U}$ rispetto a $\mathcal{V}$.

Teorema 5. *Nelle ipotesi della definizione 5, si ha*

$$\boxed{\text{DIM}(\mathcal{V}) = \text{DIM}(\text{KER}(\eta)) + \text{DIM}(\eta(\mathcal{V})).}$$

Dimostrazione: Indichiamo con il simbolo $\tilde{\mathcal{V}}$ il supplementare del nucleo di η, $\text{KER}(\eta)$, per cui possiamo scrivere $\mathcal{V} = \text{KER}(\eta) \oplus \tilde{\mathcal{V}}$. Siano $n = \text{DIM}(\mathcal{V})$ e $k = \text{DIM}(\text{KER}(\eta))$; dalla *formula di Grassmann* segue che $\text{DIM}(\tilde{\mathcal{V}}) = n - k$. Possiamo costruire una base per lo spazio $\mathcal{V}$ scegliendo k vettori linearmente indipendenti nel nucleo ed $n-k$ vettori linearmente indipendenti nel suo supplementare:

$$\begin{aligned} \text{base di } \mathcal{V} &= \text{base di } \text{KER}(\eta) \quad \cup \text{ base di } \tilde{\mathcal{V}}, \\ &= \left\{ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_k \right\} \cup \left\{ v_{k+1},\ v_{k+2},\ \dots\ v_n \right\}. \end{aligned}$$

Dato che i primi k vettori della base appartengono al $\text{KER}(\eta)$, si ha

$$\begin{aligned} \eta(\mathcal{V}) &= \text{SPAN}(\eta(v_1),\ \dots\ \eta(v_k),\ \eta(v_{k+1}),\ \dots,\ \eta(v_n)), \\ &= \text{SPAN}(0_{\mathcal{W}},\ \dots\ 0_{\mathcal{W}},\ \eta(v_{k+1}),\ \dots\ \eta(v_n)), \end{aligned}$$

cioè l'immagine $\eta(\mathcal{V})$ è in realtà generata solo dalle immagini dei vettori della base scelta nel supplementare. Mostriamo che i vettori $\eta(v_{k+1}),\, \eta(v_n)$ sono linearmente indipendenti, cosicché l'immagine ha dimensione $\textsc{Dim}(\eta(\mathcal{V})) = n - k$ ed il teorema è dimostrato.

Siano $\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_n$ $n{-}k$ scalari tali che la loro combinazione con i vettori trasformati $\eta(v_{k+1}), \ldots \eta(v_n)$ sia il vettore nullo $0_{\mathcal{W}}$. Per la linearità di η possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{W}} &= \lambda_{k+1}\eta(v_{k+1}) + \ldots + \lambda_n \eta(v_n), \\ &= \eta(\lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} &\lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n \in \textsc{Ker}(\eta) \cap \tilde{\mathcal{V}} = \{0_{\mathcal{V}}\}, \\ &\Longrightarrow \lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = 0_{\mathcal{V}}, \\ &\Longrightarrow \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Osservazione 4. Si noti che $\textsc{Ker}(\eta) \subseteq \mathcal{V}$ mentre $\eta(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$, cioè il nucleo e l'immagine sono sottospazi di spazi diversi. Ciònonostante, il teorema collega le loro dimensioni.

Osservazione 5 (Teorema di Rouché-Capelli). È possibile dare una interpretazione del teorema di Rouché-Capelli mediante le applicazioni lineari.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \text{Trovare } x \in \mathbb{K}^n \text{ tale che} \\ Ax = b, \end{cases} \qquad A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ b \in \mathbb{K}^m.$$

Se pensiamo alla matrice A come alla matrice associata ad una applicazione lineare η rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^n$, si ha che la soluzione x deve appartenere alla controimmagine del vettore b, cioè

$$x \in \eta^{-1}(b),$$

e che ogni vettore di $\eta^{-1}(b)$ è un vettore soluzione. Possiamo quindi concludere che $\eta^{-1}(b)$ è l'insieme delle soluzioni.

Si hanno quindi immediatamente i seguenti risultati.

(i) La soluzione x esiste se e solo se l'insieme delle soluzioni è non vuoto, cioè $\eta^{-1}(b) \neq \emptyset$; rovesciando questa considerazione, si ha che il vettore b deve appartenere all'immagine di $\mathbb{K}^n$ mediante η, cioè

$$\begin{aligned} b &\in \eta(\mathbb{K}^n), \\ &= \textsc{Span}(\eta(e_1), \ldots, \eta(e_n)), \\ &= \textsc{Span}(\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}), \end{aligned}$$

da cui segue che $\textsc{Range}(A) = \textsc{Range}(A, b)$.

(ii) Dal teorema sulla rappresentazione dell'immagine segue che

$$x \in \bar{x} + \text{Ker}(\eta),$$

dove si è considerata una qualsiasi soluzione $\bar{x} \in \eta^{-1}(b)$. Possiamo quindi scrivere ogni soluzione x nella forma $x = \bar{x} + x_0$, dove $x_0 \in \text{Ker}(\eta)$. L'appartenenza al $\text{Ker}(\eta)$ del vettore x_0 significa che quest'ultimo è soluzione del *problema omogeneo associato*

$$Ax_0 = 0_{\mathbb{K}}.$$

La condizione $\text{Dim}(\text{Ker}(\eta)) = 0$ garantisce l'unicità della soluzione. Infatti

$$\begin{aligned}
\text{Dim}(\text{Ker}(\eta)) = 0 &\Longrightarrow \text{Ker}(\eta) = 0_{\mathcal{V}}, \\
&\Longrightarrow x_0 = 0_{\mathcal{V}}, \\
&\Longrightarrow \eta(e_1), \ldots, \eta(e_n) \text{ sono linearmente indipendenti}, \\
&\Longrightarrow A \text{ ha rango massimo.}
\end{aligned}$$

Se la matrice è quadrata le condizioni precedenti assicurano che A è anche *non-singolare*.

2 Applicazioni lineari: guida agli esercizi

Per semplicit`a di esposizione faremo sempre riferimento ad una applicazione lineare

$$\eta \,:\, \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

tra i due spazi vettoriali $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sul campo scalare $\mathbb{K}$. Nell'esempio che discutiamo di seguito, saremo nella situazione $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Rappresentazione di applicazioni lineari

Negli esercizi proposti si considerano tre diversi modi di definire una applicazione lineare, che `e necessario saper manipolare. Una applicazione lineare pu`o essere definita

- attraverso la trasformazione delle coordinate di un generico vettore,

$$\eta \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \text{tale che } \eta(x, y, z) = (x + y, y - z)\,;$$

  La indicheremo in queste note con l'espressione *forma cartesiana*.

- attraverso i trasformati dei vettori di una base dello spazio $\mathcal{V}$ scritti rispetto ad una base dello spazio $\mathcal{W}$,

$$\eta(1, 0, 0) = (1, 0), \quad \eta(0, 1, 0) = (1, 1), \quad \eta(0, 0, 1) = (0, -1)\,;$$

- attraverso la rappresentazione matriciale dell'applicazione lineare, rispetto alle basi scelte in $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per passare da una rappresentazione all'altra, rispetto alle basi canoniche E_3 in $\mathcal{V}$ ed E_2 in $\mathcal{W}$

- $(i) \longrightarrow (ii)$, basta inserire i vettori della base di $\mathcal{V}$ in η, per esempio

$$\eta(1,0,0) = (1+0, 0-0) = (1,0), \ldots$$

- $(ii) \longrightarrow (i)$, si sfrutta la linearità di η,

$$\begin{aligned}
\eta(x,y,z) &= \eta\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big), \\
&= x\eta(1,0,0) + y\eta(0,1,0) + z\eta(0,0,1), \\
&= x(1,0) + y(1,1) + z(0,-1), \\
&= (x+y, y-z).
\end{aligned}$$

- $(ii) \longrightarrow (iii)$ *e viceversa*, è semplicissimo perchè la matrice di rappresentazione ha per colonne proprio i vettori trasformati; per esempio, la prima colonna di $\mathbf{M}$ è il vettore $\eta(1,0,0) = (1,0)$, la seconda è il vettore $\eta(0,1,0) = (1,1)$ e cosi via;

- $(i) \longrightarrow (iii)$ *e viceversa*, si passa per lo step intermedio (ii), e poi è ovvio.

Se η è definita fissando basi diverse dalla base canonica, bisogna ovviamente tenerne conto. Per esempio, se fissiamo in $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ la base $B_{\mathcal{V}} = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$

$$v_1 = (1,1,0), \qquad v_2 = (1,-1,0), \qquad v_3 = (0,0,1)$$

possiamo definire la η dell'esempio anche come

$$\eta(v_1) = (2,1), \qquad \eta(v_2) = (0,-1), \qquad \eta(v_3) = (0,-1).$$

Per cui la matrice $M_{B_{\mathcal{V}},E_3}$ è

$$M_{B_{\mathcal{V}},E_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che $\eta(v_2) = \eta(v_3)$, da cui segue che $v_2 - v_3 \in \text{KER}(\eta)$. Se, poi, fissiamo in $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ la base $B_{\mathcal{W}} = \{w_1, w_2\}$

$$w_1 = (1,1), \qquad w_2 = (1,-1)$$

allora

$$\begin{array}{rclcl} \eta(v_1) &=& (2,1) &=& (1,1)+(1,-1) &=& w_1+w_2, \\ \eta(v_2) &=& (0,-1) &=& -\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,-1) &=& -\frac{1}{2}w_1+\frac{1}{2}w_2, \\ \eta(v_3) &=& (0,-1) &=& -\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{2}(1,-1) &=& -\frac{1}{2}w_1+\frac{1}{2}w_2, \end{array}$$

e la matrice di rappresentazione corrispondente alle due basi $B_{\mathcal{V}}$ e $B_{\mathcal{W}}$ è

$$M_{B_{\mathcal{V}},B_{\mathcal{W}}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}, \\ 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si noti che si può procedere in maniera del tutto formale introducendo direttamente le basi $B_{\mathcal{V}}$ e $B_{\mathcal{W}}$ e definire η come l'applicazione lineare che trasforma i vettori di $B_{\mathcal{V}}$ nel modo seguente:

$$\eta(v_1) = w_1 + w_2, \qquad \eta(v_2) = \eta(v_3) = -\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2.$$

Ovviamente, a questa applicazione lineare corrisponde ancora la stessa matrice $M_{B_{\mathcal{V}},B_{\mathcal{W}}}$ vista poc'anzi.

Questo è un esempio di come una stessa applicazione lineare possa avere più di una rappresentazione matriciale in dipendenza dalle basi che sono state scelte.

2.2 Verifica della linearità

Data una applicazione η espressa in forma cartesiana, bisogna saperne riconoscere la linearità, o se il caso verificarne la non-linearità. Si tratta solo di verificare la definizione

$$\begin{array}{ll} \text{per ogni } v'\ v'' \in \mathcal{V}, & \eta(v'+v'') = \eta(v') + \eta(v''), \\ \text{per ogni } v \in \mathcal{V},\ \lambda \in \mathbb{K} & \eta(\lambda v) = \lambda\eta(v) \end{array}$$

Nel caso che stiamo considerando, dato che

$$(x',y',z') + (x'',y'',z'') = (x'+x'', y'+y'', z'+z''),$$

si ha

$$\begin{aligned} &\eta(x'+x'', y'+y'', z'+z'') \\ &\qquad = (x'+x''+y'+y'', y'+y''-z'-z''), \\ &\qquad = (x'+x''+y'+y'')(1,0) + (y'+y''-z'-z'')(0,1), \\ &\qquad = (x'+y')(1,0) + (y'-z')(0,1) + (x''+y'')(1,0) + (y''-z'')(0,1), \\ &\qquad = (x'+y', y'-z') + (x''+y'', y''-z''), \\ &\qquad = \eta(x',y',z') + \eta(x'',y'',z''). \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\eta(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z), \\ &= (\lambda(x+y), \lambda(y-z)), \\ &= \lambda(x+y, y-z), \\ &= \lambda\eta(x,y,z).\end{aligned}$$

Per esempio, si dica quale delle seguenti applicazioni `e lineare.

- $\eta(x,y) = (\log(x), y)$;
- $\eta(x,y) = (y,x)$;
- $\eta(x,y) = (x^2+1, y-x)$;
- $\eta(x,y,z) = (x+y, 2x+y, zx-y)$;
- $\eta(x,y,z) = (x+y)^2 + z^2$;
- $\eta(x,y,z) = (x, z, 2x+y-z)$.

2.3 Determinazione del Nucleo e dell'Immagine

Si richiede di saper determinare sia il nucleo che l'immagine di una applicazione lineare. Essendo sottospazi vettoriali, si possono scrivere sia in forma cartesiana, sia in forma parametrica, sia come $\textsc{Span}()$ — combinazioni lineari — di vettori di base (o sistemi di generatori). Si ricordi che i trasformati attraverso η di una base sono sempre un sistema di generatori per l'immagine.

Determinare il $\textsc{Ker}(\eta)$ È conveniente partire sempre dalla sua definizione in forma cartesiana:

$$\textsc{Ker}(\eta) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tale che } \eta(x,y,z) = (x+y, y-z) = (0,0)\right\}$$

e quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} +x \quad +y \qquad\quad = 0, \\ \qquad\quad +y \quad -z \quad = 0, \end{cases}$$

che ha per soluzioni

$$\begin{cases} x = -y, \\ z = +y, \end{cases}$$

per cui è chiaro che il nucleo è formato da *tutti e soli* i vettori dela forma $(-y, y, y)$, ed ha quindi dimensione 1. Quindi possiamo scrivere il nucleo di η in forma cartesiana, in forma parametrica, oppure come $\textsc{Span}()$ di vettori,

$$\begin{aligned}
\textsc{Ker}(\eta) &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x+y=0,\, z-y=0\Big\}, \\
&= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, (x,y,z) = \alpha(-1,1,1),\, \text{con } \alpha \in \mathbb{R}\Big\}, \\
&= \textsc{Span}((-1,1,1))
\end{aligned}$$

Determinare l'Immagine di η Quando è nota la dimensione del nucleo, Il teorema delle dimensioni permette immediatamente di determinare la dimensione dell'immagine

$$\textsc{Dim}(\mathcal{V}) = \textsc{Dim}(\textsc{Ker}(\eta)) + \textsc{Dim}(\eta(\mathcal{V})).$$

Nell'esempio considerato,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \textsc{Dim}(\mathcal{V}) = 3, \\
&\textsc{Dim}(\textsc{Ker}(\eta)) = 1, \\
&\textsc{Dim}(\eta(\mathcal{V})) = \textsc{Dim}(\mathcal{V}) - \textsc{Dim}(\textsc{Ker}(\eta)) = 3 - 1 = 2.
\end{aligned}$$

Quindi adesso sappiamo che dei tre vettori trasformati che formano le colonne di $\mathbf{M}$ ne possiamo scegliere solo due linearmente indipendenti per formare una base. Ovviamente, a seconda delle situazioni sono possibili molteplici scelte equivalenti. Per esempio,

$$\begin{aligned}
\eta(\mathbb{R}^3) &= \textsc{Span}((1,0), \quad (1,1)), \\
&= \textsc{Span}((1,0), \quad (0,-1)), \\
&= \textsc{Span}((1,1), \quad (0,-1)),
\end{aligned}$$

sono, in questo caso, tutte scelte lecite ed equivalenti.

Dato che $\eta(\mathcal{V})$ è un sottospazio vettoriale, può essere scritto, come nel caso del nucleo, in forma cartesiana. Con riferimento alla prima scelta di vettori di base sopra indicata, la combinazione lineare generica di $(1,0)$ e $(1,1)$ è

$$(x,y) = \alpha\,(1,0) + \beta\,(1,1) = (\alpha+\beta,\, \beta),$$

da cui segue che $\alpha = x - y$ e $\beta = y$. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
\eta(\mathbb{R}^3) &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, \text{tali che } (x,y) = (\alpha+\beta, \beta),\, \text{con } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\Big\}, \\
&= \Big\{(x-y, y),\, \text{con } x,\, y \in \mathbb{R}\Big\}
\end{aligned}$$

2.4 Determinazione di controimmagini

Dato un vettore dell'immagine, per esempio il vettore $(1,2)$, bisogna saper determinare la controimmagine $\eta^{-1}(1,2)$. Formalmente, vogliamo determinare l'insieme di vettori che si esprime in forma cartesiana come

$$\begin{aligned}\eta^{-1}(1,2) &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tale che}\ \eta(x,y,z) = (x+y,\ y-z) = (1,2)\Big\},\\ &= \Big\{x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tale che}\ x+y=1,\ y-z=2\Big\}.\end{aligned}$$

Si utilizza il teorema della rappresentazione della controimmagine, che richiede di determinare il nucleo ed un vettore $(\bar{x},\bar{y})$ tale che $\eta(\bar{x},\bar{y}) = (1,2)$, cio`e una soluzione del sistema

$$\begin{cases} +x \quad +y \qquad\quad = 1,\\ \qquad\ \ +y \quad -z \quad = 2.\end{cases}$$

Si noti bene che si chiede solo un vettore soluzione e la generica soluzione al variare di qualche parametro. In questo caso, si vede subito che scegliendo $y=0$ si ottiene la soluzione $x=1$, $y=0$ e $z=-2$, cio`e il vettore $(1,0,-2)$. Dato che abbiamo gi`a determinato il $\textsc{Ker}(\eta)$, la controimmagine $\eta^{-1}(1,2)$ si pu`o scrivere come

$$\eta^{-1}(1,2) = (1,0,-2) + \textsc{Span}((1,-1,1)),$$

oppure in forma parametrica

$$\eta^{-1}(1,2) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tale che}\ (x,y,z) = (1,0,2) + \alpha(1,-1,1),\ \text{con}\ \alpha \in \mathbb{R}\Big\}.$$

2.5 Altre proprietà di η.

Iniettività Ricordiamo che

$$\eta \text{ `e iniettiva } \Leftrightarrow \textsc{Ker}(\eta) = \Big\{0_{\mathcal{V}}\Big\} \Leftrightarrow \textsc{Dim}(\textsc{Ker}(\eta)) = 0.$$

Quindi, nell'esempio considerato η non `e iniettiva.

Suriettività Ricordiamo che

$$\eta \text{ `e suriettiva } \Leftrightarrow \eta(\mathcal{V}) = \mathcal{W} \Leftrightarrow \textsc{Dim}(\eta(\mathcal{V})) = \textsc{Dim}(\mathcal{W}).$$

Quindi l'applicazione considerata `e suriettiva.